

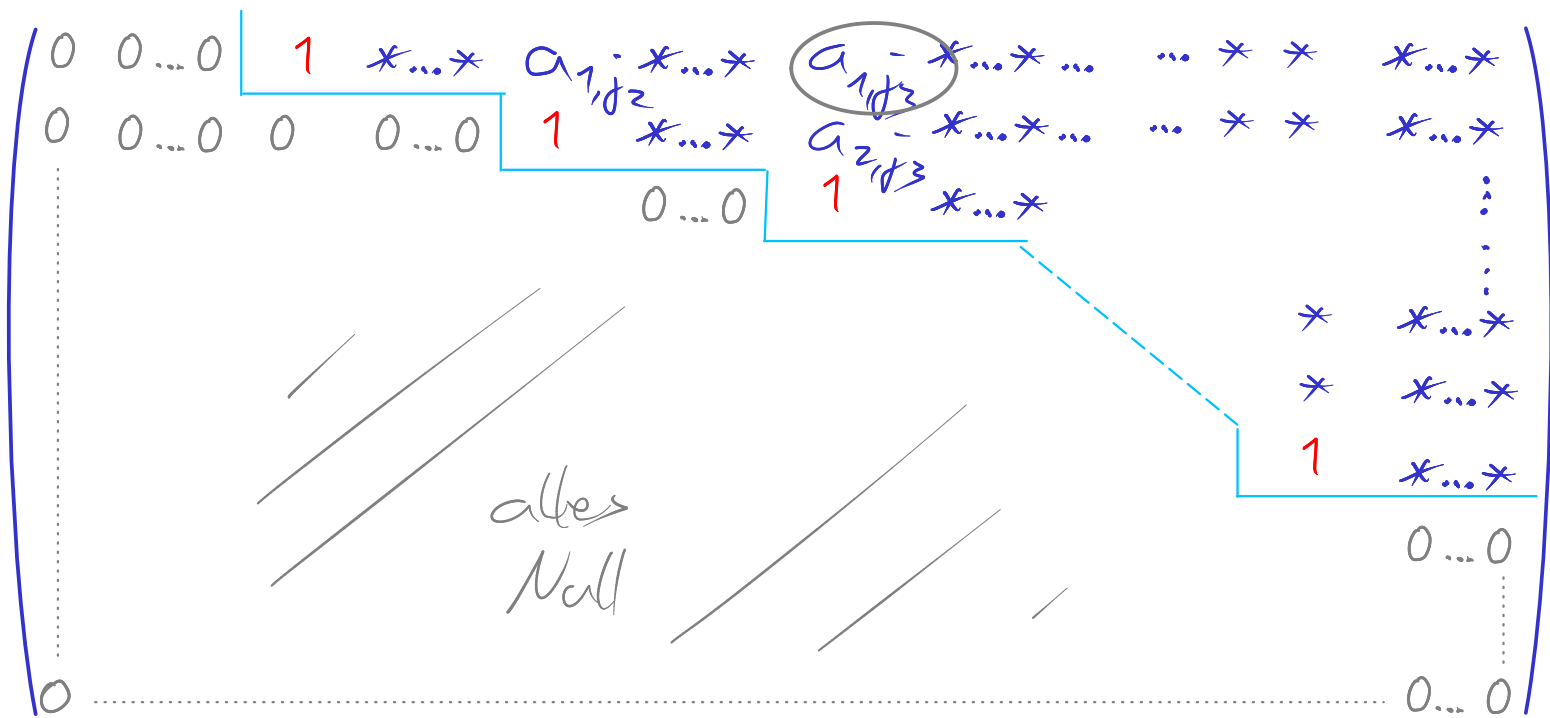
Beweis:

(a) Zeilenstufenform:

Gaußsche Eliminationsverfahren (Vorlesung 4).

Zeilennormalform:

Wende auf Matrix in Zeilenstufenform Zeilen-(Skalarm.)  $a_{ij}$  sodass alle Pivots 1 sind:



Zeilen-(Add.)

-  $a_{1,j_2}$  - fache von Zeile 2 zu Zeile 1

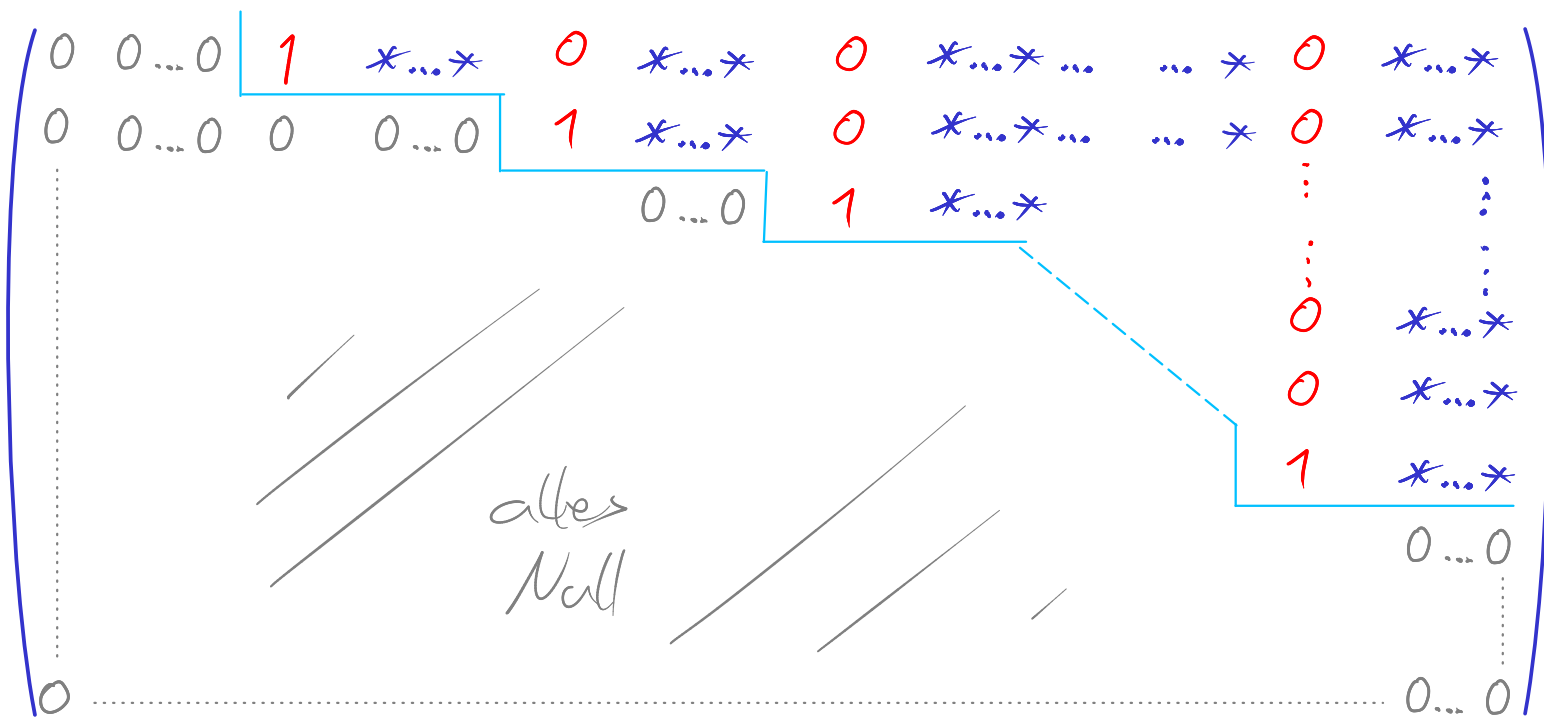
-  $a_{2,j_3}$  - fache von Zeile 3 zu Zeile 2

-  $a_{1,j_3}$  - fache von Zeile 3 zu Zeile 1

usw.

b) analog

c) Nach (a) können wir durch EZZU erhalten:



Wende Spalten- (Vert.) zu um folgende Gestalt zu erhalten:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & * \dots * & * \dots * \\
 0 & 1 & 0 & 0 & * \dots * & * \dots * \\
 0 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & * \dots * & * \dots * \\
 & & & 0 & * \dots * & * \dots * \\
 & & & 1 & * \dots * & * \dots * \\
 \hline
 & & & & & \\
 \text{Null} & & & & & \text{Null}
 \end{array} \right)$$

Durch Spalten- (Add.) lässt sich Normalform erreichen. □

Beweis:

Bis einschließend Schritt 3  
(Zeilenstufenform) nichts mehr  
zu zeigen:

$$\begin{aligned}\text{Lös}(A, \underline{b}) &= \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) \\ &= \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})\end{aligned}$$

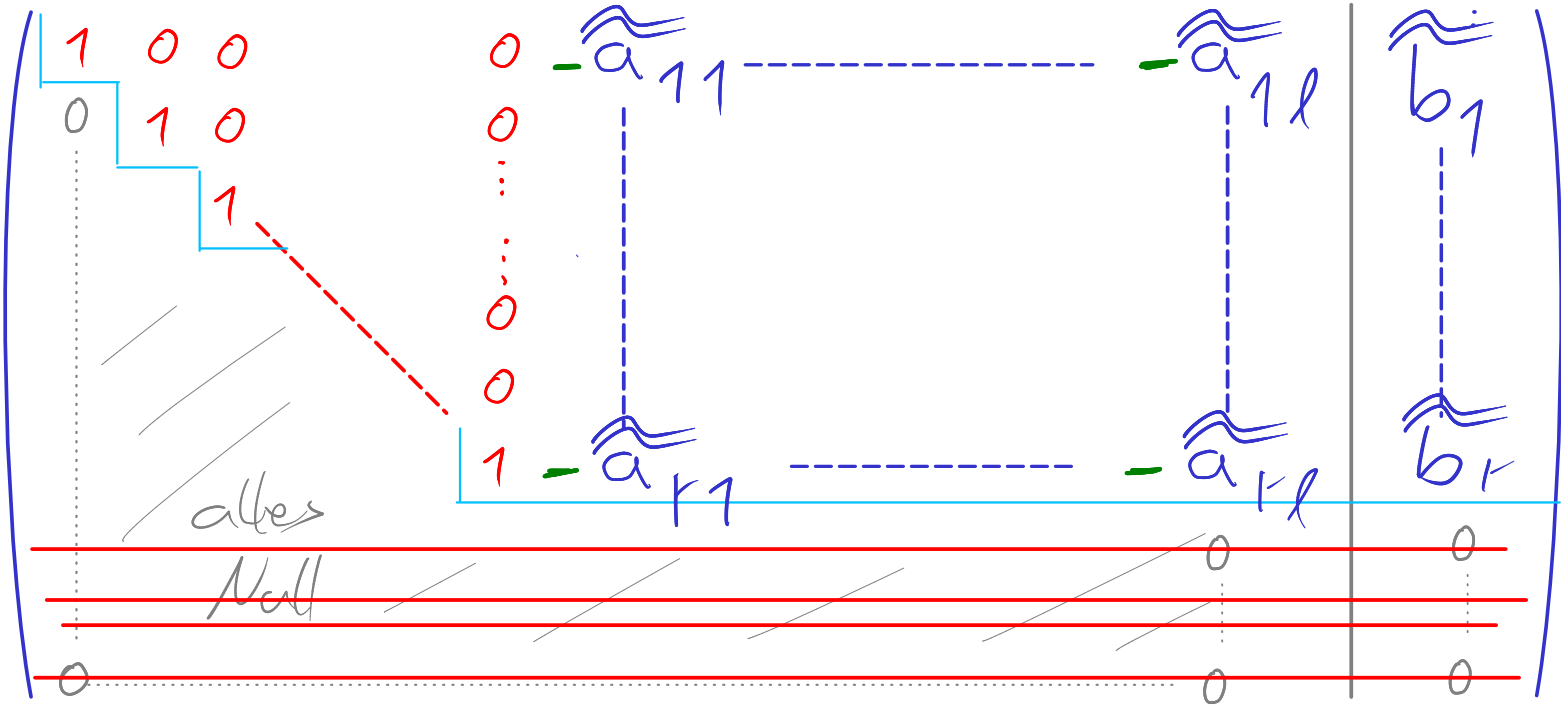
Nummeriere, um Beweis lesbar  
zu halten, Variablen so, dass  
Pivot-Elemente auf Diagonale  
von  $\tilde{A}$  stehen:

$$(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) =$$

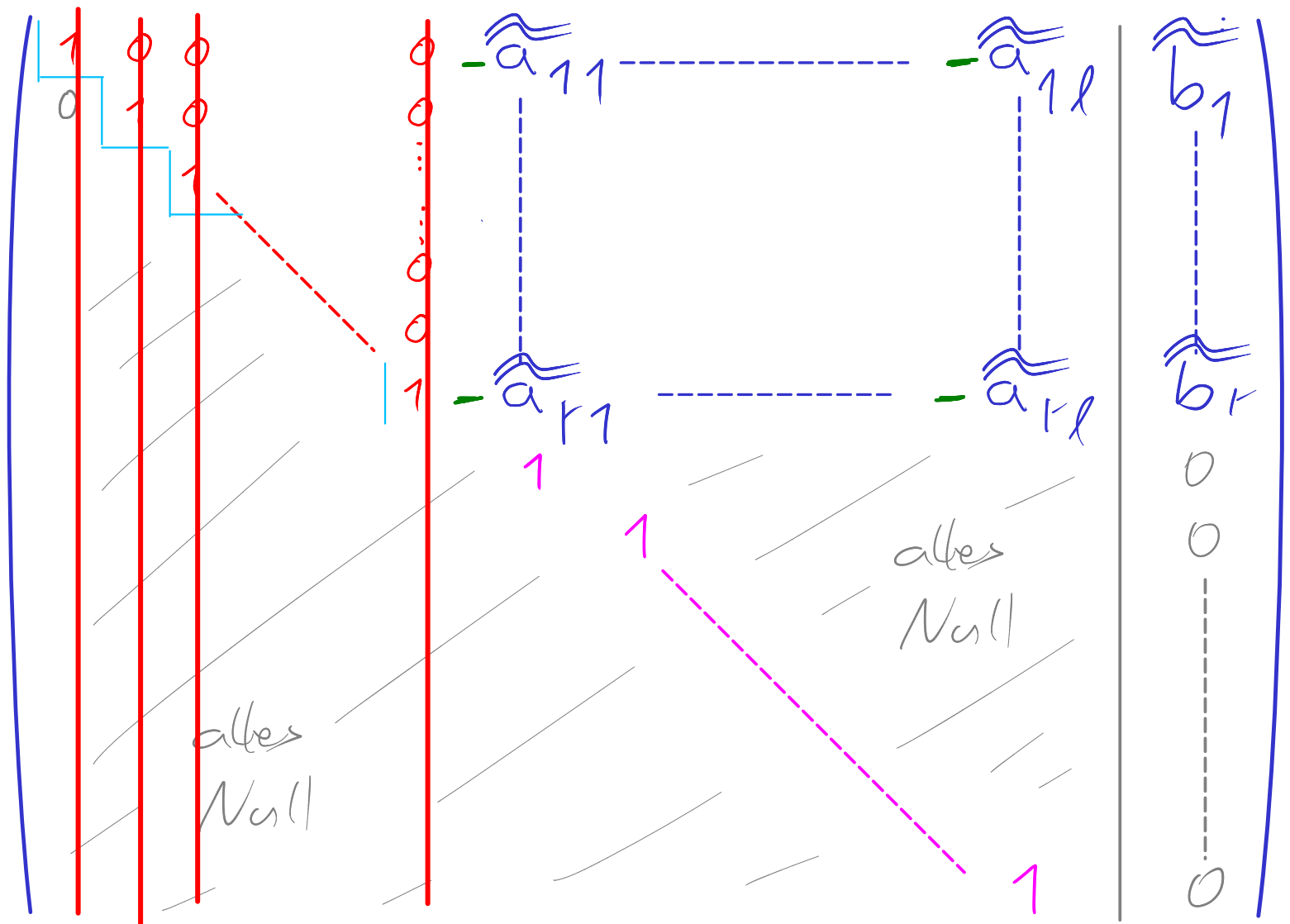
The diagram shows a matrix  $(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})$  in row echelon form. The matrix is enclosed in large blue parentheses. The left part of the matrix is the coefficient matrix  $\tilde{A}$ , and the right part is the augmented vector  $\tilde{\underline{b}}$ . The matrix is partitioned into three main sections by vertical lines: the first section contains the identity matrix  $I$  (indicated by a red bracket above the top-left corner), the second section contains the pivot elements  $\tilde{a}_{11}, \dots, \tilde{a}_{r1}$  (indicated by blue dashed lines and brackets), and the third section contains the right-hand side values  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r$  (indicated by blue dashed lines and brackets). The bottom-right corner of the matrix is shaded with diagonal lines and labeled "alles Null". The matrix is zero below the  $r$ -th row. The pivot elements are marked with blue double underlines. The right-hand side values are marked with blue double underlines. The matrix is zero below the  $r$ -th row.

$$l = n - r$$

Schritte 4 & 5:  $\downarrow \downarrow \dots$



Schritte 6 & 7:



Wir erhalten:

$$c_i = \begin{pmatrix} -\hat{a}_{1i} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{ri} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} -\hat{a}_{1i} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{ri} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} |e_i$$

$$d = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} \in \text{Lös}(A, \underline{b}) = \text{Lös}(\widetilde{A}, \widetilde{\underline{b}}):$$


---

$$\left( \widetilde{A} \cdot \underline{d} \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$$

Zeilen 1 bis r

$$+ \begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & & & a_{rl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{\underline{b}} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

Zeilen 1 bis r

$$\left( \widetilde{A} \cdot \underline{d} \right) = \underline{0} = \widetilde{\underline{b}}$$

Zeilen r bis m

Zeilen r bis m

Also  $\widetilde{A} \cdot \underline{d} = \widetilde{\underline{b}}$  ✓





②  $e_1, \dots, e_\ell$  linear unabhängig,  
denn  $e_1, \dots, e_\ell$  linear  
unabhängig.

Werden in Vorlesung 19  
sehen:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A) & (= \text{Rang}(\tilde{A})) \\ & = \text{Anzahl der Pivotelemente} \\ & = r \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \dim \text{Lös}(A) & = n - \text{Rang}(A) \\ & = \underbrace{n - r}_\ell \end{aligned}$$

Nach Basisergänzungssatz folgt:

$(e_1, \dots, e_\ell)$  Basis von  $\text{Lös}(A)$ .

□