Beweis:

(a) Zeilenstufenform:

Gaußsche Eliminations-verfahren (Vorlesung 4).

Zeilennormalform:

Wende auf Matrix in Zeilenstufenform Zeilen-(Skalarm.) an, sodass alle Pivots 1 sind:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\dots0 & 1 & *\dots* & a_{1,j_2} & *\dots* & a_{1,j_3} & *\dots* & \dots & \dots & * & * & *\dots* \\
0 & 0\dots0 & 0 & 0\dots0 & 1 & *\dots* & a_{2,j_3} & *\dots* & \dots & \dots & * & * & *\dots* \\
\vdots & & & & & 0\dots0 & 1 & *\dots* & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & * & *\dots* \\
 & & & \text{alles} & & & & & & & & * & *\dots* \\
 & & & \text{Null} & & & & & & & & 1 & *\dots* \\
 & & & & & & & & & & & & 0\dots0 \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & & & & & & & & & & & 0\dots0
\end{pmatrix}
$$

Zeilen-(Add.)

$-a_{1,j_2}$-fache von Zeile 2 zu Zeile 1

$-a_{2,j_3}$-fache von Zeile 3 zu Zeile 2

$-a_{1,j_3}$-fache von Zeile 3 zu Zeile 1

usw.

b) analog

c) Nach (a) können wir durch EZU erhalten:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots*\cdots & \cdots * & 0 & *\cdots* \\
0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots*\cdots & \cdots * & 0 & *\cdots* \\
\vdots & & & & & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & & 0 & *\cdots* \\
 & & & \text{alles Null} & & & & & & 0 & *\cdots* \\
 & & & & & & & & & 1 & *\cdots* \\
 & & & & & & & & & & 0\cdots0 \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0\cdots0
\end{pmatrix}
$$

Wende Spalten-(Vert.) an um folgende Gestalt zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc}
1 & 0 & 0 & & & 0 & * \cdots * & & * \cdots * \\
0 & 1 & 0 & & & 0 & * \cdots * & & * \cdots * \\
0 & 0 & 1 & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \ddots & & 0 & * \cdots * & & * \cdots * \\
 & & & & \ddots & 0 & * \cdots * & & * \cdots * \\
 & & & & & 1 & * \cdots * & & * \cdots * \\
\hline
 & & \text{Null} & & & & & \text{Null} &
\end{array}\right)$$

Durch Spalten-(Add.) lässt sich Normalform erreichen. $\square$

Beweis:

Bis einschließlich Schritt 3 (Zeilennormalform) nichts mehr zu zeigen:

$$\text{Lös}(A, \underline{b}) = \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) = \text{Lös}(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{\underline{b}}})$$

Nummeriere, um Beweis lesbar zu halten, Variablen so dass Pivot-Elemente auf Diagonale von $\tilde{\tilde{A}}$ stehen:

$$(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{\tilde{\underline{b}}}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0\ \cdots\ 0}}^{r}} & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{\hat{a}}_{11} \ \cdots\cdots\ \hat{\hat{a}}_{1\ell} & \hat{\hat{b}}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots & & \\ & & & \ddots & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \hat{\hat{a}}_{r1} \ \cdots\cdots\ \hat{\hat{a}}_{r\ell} & \hat{\hat{b}}_r \\ & \text{alles} & & & & 0 & 0 \\ & \text{Null} & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\ell = n - r$$

Schritte 4 & 5:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \downarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\hat{a}}_{11} & \cdots & -\tilde{\hat{a}}_{1\ell} & \tilde{\hat{b}}_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & 1 & \ddots & \vdots & & & & \\
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & -\tilde{\hat{a}}_{r1} & \cdots & -\tilde{\hat{a}}_{r\ell} & \tilde{\hat{b}}_r \\
 & & \text{alles} & & & & & 0 & 0 \\
 & & \text{Null} & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Schritte 6 & 7:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{\hat{a}}_{11} & \cdots & -\tilde{\hat{a}}_{1\ell} & \tilde{\hat{b}}_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & 1 & \ddots & \vdots & & & & \\
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & -\tilde{\hat{a}}_{r1} & \cdots & -\tilde{\hat{a}}_{r\ell} & \tilde{\hat{b}}_r \\
 & & & & & 1 & & \text{alles} & 0 \\
 & & & & & & 1 & \text{Null} & 0 \\
 & & \text{alles} & & & & & \ddots & \vdots \\
 & & \text{Null} & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Wir erhalten:

$$\underline{c}_i = \begin{pmatrix} -\tilde{\tilde{a}}_{1i} \\ \vdots \\ -\tilde{\tilde{a}}_{ri} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{\underline{e}_i} \end{pmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{b}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d} \in \text{Lös}(A, \underline{b}) = \text{Lös}(\widetilde{\widehat{A}}, \underline{\widetilde{\widehat{b}}}):$$

$$\left(\widetilde{\widehat{A}} \cdot \underline{d}\right)_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } r}} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\widehat{b}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\widehat{b}}_r \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \widetilde{\widehat{a}}_{11} & \cdots & \widetilde{\widehat{a}}_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{\widehat{a}}_{r1} & \cdots & \widetilde{\widehat{a}}_{rl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underline{\widetilde{\widehat{b}}}\right)_{\substack{\text{Zeilen} \\ 1 \text{ bis } r}} \checkmark$$

$$\left(\widetilde{\widehat{A}} \cdot \underline{d}\right)_{\substack{\text{Zeilen} \\ r \text{ bis } m}} = \underline{0} = \left(\underline{\widetilde{\widehat{b}}}\right)_{\substack{\text{Zeilen} \\ r \text{ bis } m}}$$

Also $\widetilde{\widehat{A}} \cdot \underline{d} = \underline{\widetilde{\widehat{b}}}$ $\checkmark$

① $c_i \in \text{Lös}(A) = \text{Lös}(\widetilde{\widehat{A}})$:

$$\underbrace{\left(\widetilde{\widehat{A}} \cdot c_i\right)}_{\text{Zeilen } 1 \text{ bis } r} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\widetilde{\widehat{a}}_{1i} \\ \vdots \\ -\widetilde{\widehat{a}}_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{\widehat{a}}_{11} & \cdots & \widetilde{\widehat{a}}_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{\widehat{a}}_{r1} & \cdots & \widetilde{\widehat{a}}_{r\ell} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_i}$$

$$= \begin{pmatrix} -\widetilde{\widehat{a}}_{1i} \\ \vdots \\ -\widetilde{\widehat{a}}_{ri} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{\widehat{a}}_{1i} \\ \vdots \\ \widetilde{\widehat{a}}_{ri} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\underbrace{\left(\widetilde{\widehat{A}} \cdot c_i\right)}_{\text{Zeilen } r \text{ bis } m} = \underline{0}$$

(2) $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_\ell$ linear unabhängig, denn $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_\ell$ linear unabhängig.

Werden in Vorlesung 19 sehen:

$$\mathrm{Rang}(A) \; (= \mathrm{Rang}(\tilde{A}))$$
$$= \text{Anzahl der Pivotelemente}$$
$$= r$$

Daher ist

$$\dim \mathrm{L\ddot{o}s}(A) = n - \mathrm{Rang}(A)$$
$$= \underbrace{n - r}_{\ell}$$

Nach Basisergänzungssatz folgt:

$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_\ell)$ Basis von $\mathrm{L\ddot{o}s}(A)$.

$\square$